

Vježbe 8

1. (a) Dokazati da je binarni polinom $x^3 + x^2 + 1$ prost.
- (b) Upotrijebiti ovaj polinom za dobijanje odgovarajućeg Hamming-ovog koda (napisati kontrolnu matricu).
- (c) Kreirati odgovarajuću hardversku strukturu (pravilo za funkcionisanje pomjeračkih registara) ovog koda.
- (d) Kodirati poruku 1001 kreiranim Hamming-ovim kodom.
- (e) Generisana je greška na poziciji x^2 . Provjeriti rad kreiranog Hamming-ovog koda u ovom slučaju.
- (f) Predstaviti kontrolnu matricu Hamming-ovog koda sa 15 bita, ako je generatorski polinom $x^4 + x + 1$.

Rješenje:

- (a) Binarni polinom se, u opštem slučaju smatra prostim, ukoliko nije djeljiv sa polinomima nižeg reda, tj. ako u procesu dijeljenja sa njima dobijamo ostatak.

Podijelimo $x^3 + x^2 + 1$ redom sa $x^2 + x + 1$, $x + 1$ i x .

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1) = x \\ \underline{x^3 + x^2 + 1} \\ x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (x^3 + x^2 + 1) : (x + 1) = x^2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 + 1) : x = x^2 + x \\ \underline{x^3} \\ x^2 + 1 \\ \underline{x^2} \\ 1 \end{array}$$

Očigledno, dobijamo ostatak prilikom svakog dijeljenja, što znači da je posmatrani binarni polinom prost.

- (b) Označimo sa a korjene posmatranog polinoma. Dalje možemo pisati:

$$a^3 + a^2 + 1 = 0, \text{ odnosno}$$

$$a^3 = a^2 + 1$$

$$a^4 = aa^3 = a(a^2 + 1) = a^3 + a = a^2 + a + 1$$

$$a^5 = aa^4 = a(a^2 + a + 1) = a^3 + a^2 + a = a^2 + 1 + a^2 + a = a + 1$$

$$a^6 = aa^5 = a(a + 1) = a^2 + a$$

$$a^7 = aa^6 = a(a^2 + a) = a^3 + a^2 = a^2 + 1 + a^2 = 1$$

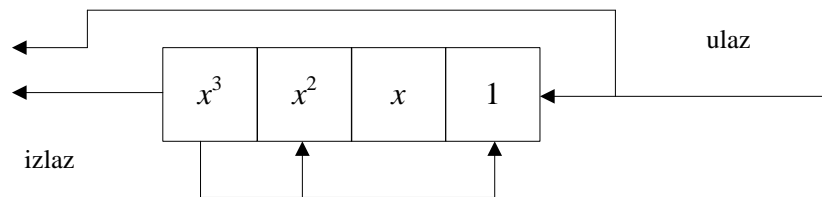
Zapišimo dobijene rezultate u binarnom obliku:

$$a^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a^6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kontrolna matrica H je tada:

$$H = \begin{matrix} & a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(c) Hardverska struktura je oblika:



(d) Poruka koju treba kodirati je 1001, odnosno:

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ _ \ _ \ _$$

U cilju dobijanja nedostajućih kontrolnih bita podijelimo poznati dio poruke sa datim binarnim polinomom:

$$(x^6 + x^3) : (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\underline{x^6 + x^5 + x^3}$$

$$x^5$$

$$\underline{x^5 + x^4 + x^2}$$

$$x^4 + x^2$$

$$\underline{x^4 + x^3 + x}$$

$$x^3 + x^2 + x$$

$$\underline{x^3 + x^2 + 1}$$

$$x + 1$$

Imajući u vidu dobijeni ostatak, zaključujemo da su kontrolni biti 011, odnosno da je kodirana poruka oblika:

$$a^6 \ a^5 \ a^4 \ a^3 \ a^2 \ a \ 1$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1$$

(e) Pošto je greška na poziciji a^2 , to je dobijena poruka:

$$a^6 \ a^5 \ a^4 \ a^3 \ a^2 \ a \ 1$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

Dekodiranje obavljamo dijeljenjem polinoma dobijene poruke i generišućeg polinoma:

$$(x^6 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x^3 + x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^3 \\ \underline{x^5 + x^2 + x + 1} \\ x^5 + x^4 + x^2 \\ \underline{x^4 + x + 1} \\ x^4 + x^3 + x \\ \underline{x^3 + 1} \\ x^3 + x^2 + 1 \\ \underline{x^2} \end{array}$$

Odavde nedvosmisleno zaključujemo da je greška detektovana na poziciji a^2 .

(f) Označimo sa a korjene posmatranog polinoma. Dalje možemo pisati:

$$a^4 + a + 1 = 0, \text{ odnosno}$$

$$a^4 = a + 1$$

$$a^5 = aa^4 = a(a + 1) = a^2 + a$$

$$a^6 = aa^5 = a(a^2 + a) = a^3 + a^2$$

$$a^7 = aa^6 = a(a^3 + a^2) = a^4 + a^3 = a^3 + a + 1$$

$$a^8 = aa^7 = a(a^3 + a + 1) = a^4 + a^2 + a = a + 1 + a^2 + a = a^2 + 1$$

$$a^9 = aa^8 = a(a^2 + 1) = a^3 + a$$

$$a^{10} = aa^9 = a(a^3 + a) = a^4 + a^2 = a^2 + a + 1$$

$$a^{11} = aa^{10} = a(a^2 + a + 1) = a^3 + a^2 + a$$

$$a^{12} = aa^{11} = a(a^3 + a^2 + a) = a^4 + a^3 + a^2 = a^3 + a^2 + a + 1$$

$$a^{13} = aa^{12} = a(a^3 + a^2 + a + 1) = a^4 + a^3 + a^2 + a = a + 1 + a^3 + a^2 + a = a^3 + a^2 + 1$$

$$a^{14} = aa^{13} = a(a^3 + a^2 + 1) = a^4 + a^3 + a = a + 1 + a^3 + a = a^3 + 1$$

$$a^{15} = aa^{14} = a(a^3 + 1) = a^4 + a = a + 1 + a = 1$$

Stoga, kontrolna matrica je oblika:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$